Université Paris-Diderot **7 octobre 2014**
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I Section C

Devoir surveillé 1

Durée : 1 heure.
Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1. Exprimer comme produit de facteurs linéaires le polynôme suivant :

$$P(z) = 3z^2 + (-1 + \mathrm{i})z + 4\mathrm{i}.$$

Corrigé 1. Pour exprimer P comme produit de facteurs linéaires, on calcule ses racines. On a $\Delta = -50\mathrm{i}$. Cherchons $\delta = x + \mathrm{i}y$ solution(s) de $\delta^2 = \Delta$ par la méthode exponentielle : $\Delta = -50\mathrm{i} = 50e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ donc $\delta = \pm\sqrt{50}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \pm 5\sqrt{2}\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = \pm(5 - 5\mathrm{i})$.
On en déduit les deux solutions de l'équation $z_\pm = \frac{-(-1+\mathrm{i})\pm(5-5\mathrm{i})}{6}$, soit $z_+ = 1 - \mathrm{i}$ et $z_- = \frac{2}{3}(-1 + \mathrm{i})$. Finalement, on a

$$P(z) = 3(z - 1 + \mathrm{i})(z - \frac{2}{3}(-1 + \mathrm{i}))$$

Exercice 2.

(a) Énoncer les formules de Moivre.

(b) Exprimer $\sin(3\alpha)$ et $\cos(3\alpha)$ en fonction des puissances de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.
En déduire $\tan(3\alpha) = \frac{\sin(3\alpha)}{\cos(3\alpha)}$ en fonction de $\tan\alpha$.

Corrigé 2.

(a) $\big(\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)\big)^n = \cos(n\alpha) + \mathrm{i}\sin(n\alpha)$.

(b) Donc en développant avec le binôme de Newton (on retrouve les coefficients $1, 3, 3, 1$ grâce au triangle de Pascal par exemple) :

$$\cos(3\alpha) + \mathrm{i}\sin(3\alpha) = \cos(\alpha)^3 + 3\cos(\alpha)^2\mathrm{i}\sin(\alpha) - 3\cos(\alpha)\sin(\alpha)^2 - \mathrm{i}\sin(\alpha)^3,$$

d'où $\cos(3\alpha) = \cos(\alpha)^3 - 3\cos(\alpha)\sin(\alpha)^2$ et $\sin(3\alpha) = 3\cos(\alpha)^2\sin(\alpha) - \sin(\alpha)^3$. On en déduit

$$\tan(3\alpha) = \frac{3\cos(\alpha)^2\sin(\alpha) - \sin(\alpha)^3}{\cos(\alpha)^3 - 3\cos(\alpha)\sin(\alpha)^2} = \frac{3\tan(\alpha) - \tan(\alpha)^3}{1 - 3\tan(\alpha)^2},$$

après avoir divisé numérateur et dénominateur par $\cos(\alpha)^3$

Exercice 3.

(a) Exprimer sous formes exponentielle et trigonométrique les solutions de l'équation $z^5 = 1$.

(b) Représenter graphiquement ces nombres dans le plan.

(c) Définir les racines primitives cinquièmes de l'unité et les déterminer.

(d) Soit η une racine primitive cinquième de l'unité. Calculer :

$$\eta^2 + \eta^4 + \eta^6 + \eta^8.$$

Corrigé 3.

(a) Racines cinquièmes de l'unité : $\eta_k = e^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}} = \cos(\frac{2k\pi}{5}) + \mathrm{i}\sin(\frac{2k\pi}{5})$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

(c) Soit η une racine cinquième de l'unité. Alors η est racine primitive si et seulement si $\eta^m \neq 1$ pour $0 < m < 5$. On vérifie que toutes sont primitives sauf $\eta_0 = 1$.

(d) Soit $S = \eta^2 + \eta^4 + \eta^6 + \eta^8$. On a $\eta^5 = 1$ donc $\eta^6 = \eta$ et $\eta^8 = \eta^3$, d'où

$$S = \eta^2 + \eta^4 + \eta + \eta^3 = \eta + \eta^2 + \eta^3 + \eta^4.$$

Comme η est primitive, l'ensemble $\{\eta^k, 0 \leq k \leq 4\}$ est l'ensemble des racines cinquième de sorte que $1 + \eta + \eta^2 + \eta^3 + \eta^4 = 0$ (la somme des racines n-èmes est nulle). D'où $S = -1$